VERIFICARE I SEGUENTI LIMITI:

$\lim_{x \to 1} (2x+3) = 5 \qquad (1.1)$

RICORDA: $\qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = c$

se $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) > 0$ per cui se $x \in Dom(f)$ è tale che $0 < |x - x_0| < \delta$ allora risulta che $|f(x) - c| < \varepsilon$

Comunque esista un valore $\varepsilon > 0$, esiste un corrispondente δ che soddisfa la definizione? Per ogni $\varepsilon > 0$ la disequazione diventa

$|f(x) - c| < \varepsilon$ cioè $|(2x+3) - 5| < \varepsilon$ si ha:

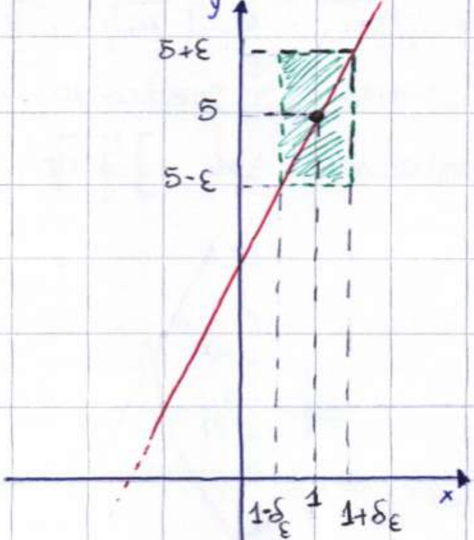
$|2x - 2| < \varepsilon$ cioè $-\varepsilon < 2x - 2 < \varepsilon$ ed ancora

$2 - \varepsilon < 2x < 2 + \varepsilon$. Dividendo tutti i membri della disequazione per 2 otteniamo:

$1 - \varepsilon < x < 1 + \varepsilon$ eq: $|x - 1| < \varepsilon$

A Tale punto concludiamo che, comunque si scelga ε, esiste un corrispondente δ (dipendente da ε) che rende vera la proprietà richiesta nella definizione.

Nel nostro caso ciò si verifica per $\delta = \varepsilon$.



Verificare che $\lim_{x \to 1} (2x+3)$ è uguale a 5 significa verificare che, preso comunque un $\varepsilon > 0$, le soluzioni della disequazione $|(2x+3) - 5| < \varepsilon$ contengono un intorno di 1, privato al più del punto 1, di ampiezza dipendente da ε.

$\lim_{x \to 1} (2x^2 - 1) = 1$ Sia $\varepsilon > 0$. La disequazione $|f(x) - c| < \varepsilon$ in questo caso diventa: $|(2x^2 - 1) - 1| < \varepsilon$ cioè $|2x^2 - 2| < \varepsilon$ ed ancora:

$$-\varepsilon < 2x^2 - 2 < \varepsilon \quad \text{da cui}$$

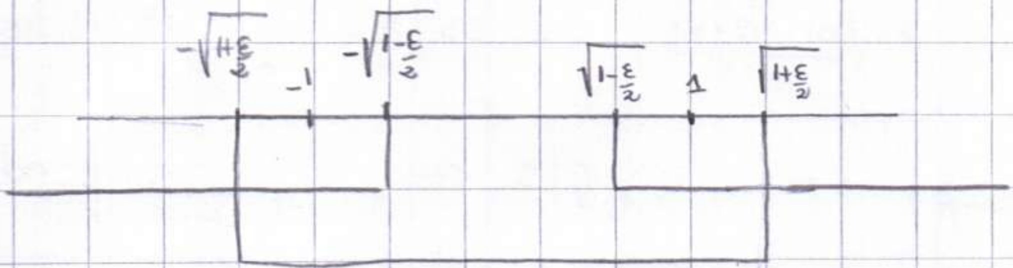
$$2 - \varepsilon < 2x^2 < 2 + \varepsilon \quad .\ \text{Dividiamo tutti}$$

i membri per 2: $\frac{2-\varepsilon}{2} < x^2 < \frac{2+\varepsilon}{2} \iff 1 - \frac{\varepsilon}{2} < x^2 < 1 + \frac{\varepsilon}{2}$.

Volendo applicare la radice quadrata, ricordiamoci di imporre le condizioni di esistenza della stessa: $1 - \frac{\varepsilon}{2} \geq 0 \iff \frac{\varepsilon}{2} \leq 1 \iff \varepsilon \leq 2$

Pertanto:

$$\begin{cases} x^2 > 1 - \frac{\varepsilon}{2} \\ x^2 < 1 + \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad \begin{cases} x < -\sqrt{1-\frac{\varepsilon}{2}} \ \vee \ x > \sqrt{1-\frac{\varepsilon}{2}} \\ -\sqrt{1+\frac{\varepsilon}{2}} < x < +\sqrt{1+\frac{\varepsilon}{2}} \end{cases}$$

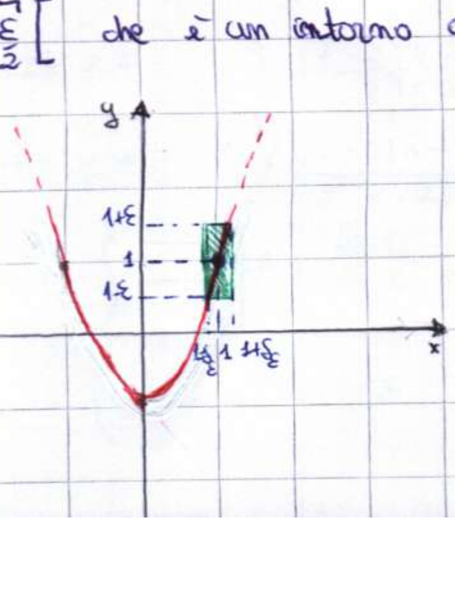


Rappresentando graficamente le soluzioni del sistema di disequazioni, si vede che $1-\frac{\varepsilon}{2} < x^2 < 1+\frac{\varepsilon}{2}$ è verificata per:

$$x \in \left]-\sqrt{1+\frac{\varepsilon}{2}} ; -\sqrt{1-\frac{\varepsilon}{2}}\right[\cup \left]\sqrt{1-\frac{\varepsilon}{2}} ; \sqrt{1+\frac{\varepsilon}{2}}\right[$$

e che l'insieme cui appartiene x contiene l'intervallo:

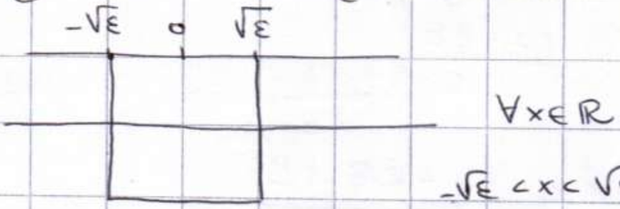
$$I_\varepsilon = \left]\sqrt{1-\frac{\varepsilon}{2}}, \sqrt{1+\frac{\varepsilon}{2}}\right[\quad \text{che è un intorno di } x_0 = 1.$$



$\lim_{x \to 0} (x^2+3) = 3$

$\forall \varepsilon > 0$ si ha $|(x^2+3)-3| < \varepsilon$ cioè $|x^2| < \varepsilon$ che equivale a:
$-\varepsilon < x^2 < \varepsilon$. Si risolve pertanto il seguente sistema:

$$\begin{cases} x^2 > -\varepsilon \\ x^2 < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ -\sqrt{\varepsilon} < x < \sqrt{\varepsilon} \end{cases}$$



si conclude che $x \in (-\sqrt{\varepsilon}, \sqrt{\varepsilon})$ che coincide con un intorno di $x_0 = 0$. $I_0 = (-\sqrt{\varepsilon}, \sqrt{\varepsilon})$

$\lim_{x \to 5} \frac{3x}{x-2} = 5$

$\forall \varepsilon > 0$ si ha $\left| \frac{3x}{x-2} - 5 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{3x-5x+10}{x-2} \right| < \varepsilon$

ovvero $\left| \frac{-2x+10}{x-2} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow 2\left| \frac{5-x}{x-2} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{5-x}{x-2} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$

Da questa si ottiene successivamente:

$$\begin{cases} \frac{5-x}{x-2} > -\frac{\varepsilon}{2} \\ \frac{5-x}{x-2} < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{10-2x}{2(x-2)} > \frac{-\varepsilon x + 2\varepsilon}{2(x-2)} & \text{purché sia } x \neq 2 \\ \frac{10-2x}{2(x-2)} < \frac{\varepsilon x - 2\varepsilon}{2(x-2)} & \text{purché sia } x \neq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{-2x+\varepsilon x - 2\varepsilon + 10}{2(x-2)} > 0 \\ \frac{-2x-\varepsilon x + 10 + 2\varepsilon}{2(x-2)} < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{(\varepsilon-2)x - 2\varepsilon + 10}{2(x-2)} > 0 \Leftrightarrow \frac{(2-\varepsilon)x + 2\varepsilon - 10}{2(x-2)} < 0 \\ \frac{(2+\varepsilon)x - 10 - 2\varepsilon}{2(x-2)} > 0 \end{cases}$$

$$\varepsilon < 2 \quad \begin{cases} \left\| \begin{matrix} N>0 & x > \frac{10-2\varepsilon}{2-\varepsilon} \\ D>0 & x>2 \end{matrix} \right. \\ \left\| \begin{matrix} N>0 & x > \frac{10+2\varepsilon}{2+\varepsilon} \\ D>0 & x>2 \end{matrix} \right. \end{cases} \quad \begin{cases} 2 < x < \frac{10-2\varepsilon}{2-\varepsilon} \\ x < 2 \lor x > \frac{10+2\varepsilon}{2+\varepsilon} \end{cases}$$

Come si fa a sapere chi tra $\frac{10-2\varepsilon}{2-\varepsilon}$ e $\frac{10+2\varepsilon}{2+\varepsilon}$

è più grande? BASTA CALCOLARE IL m.c.m!

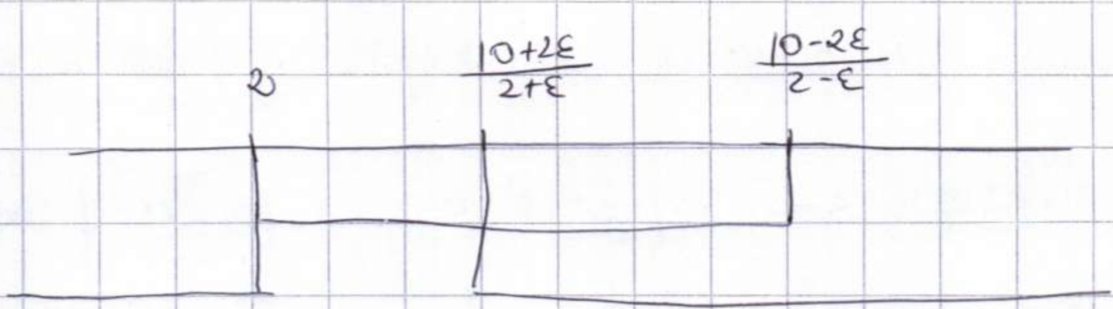
Risulta che $\frac{10-2\varepsilon}{2-\varepsilon} = \frac{-2\varepsilon^2+6\varepsilon+20}{4-\varepsilon^2}$

e $\frac{10+2\varepsilon}{2+\varepsilon} = \frac{-2\varepsilon^2-6\varepsilon+20}{4-\varepsilon^2}$. Pertanto $\frac{10+2\varepsilon}{2+\varepsilon} < \frac{10-2\varepsilon}{2-\varepsilon}$

Tornando al sistema:

$$\begin{cases} 2 < x < \frac{10-2\varepsilon}{2-\varepsilon} \\ x < 2 \ \vee \ x > \frac{10+2\varepsilon}{2+\varepsilon} \end{cases}$$

si risolve graficamente:



da cui: $\frac{10+2\varepsilon}{2+\varepsilon} < x < \frac{10-2\varepsilon}{2-\varepsilon}$; utilizzando poi

degli "artifici" si ha:

$$\frac{10+2\varepsilon}{2+\varepsilon} = \frac{10+5\varepsilon-3\varepsilon}{2+\varepsilon} = \frac{5(2+\varepsilon)}{2+\varepsilon} - \frac{3\varepsilon}{2+\varepsilon} < 5$$

$$\frac{10-2\varepsilon}{2-\varepsilon} = \frac{10-5\varepsilon+3\varepsilon}{2-\varepsilon} = \frac{5(2-\varepsilon)}{2-\varepsilon} + \frac{3\varepsilon}{2+\varepsilon} > 5$$

che ci consente di affermare che $I = \left(\frac{10+2\varepsilon}{2+\varepsilon} ; \frac{10-2\varepsilon}{2-\varepsilon} \right)$

è un intorno di 5!