Funzioni periodiche

Una funzione f si dice periodica se esiste un numero reale positivo T tale che, per ogni $x \in D_f$ si abbia:

$$x + T \in D_f \quad e \quad f(x+T) = f(x).$$

Il più piccolo dei numeri T per cui vale tale proprietà si chiama periodo della funzione.

PERIODO DELLE FUNZIONI GONIOMETRICHE ELEMENTARI

$y = \sin x \longmapsto T = 2\pi$

$y = \cos x \longmapsto T = 2\pi$

$y = tg x \longmapsto T = \pi$

$y = ctg x \longmapsto T = \pi$

· Consideriamo il caso in cui l'argomento del seno sia lineare:

$$y = \sin(\omega x + \Phi)$$

ove Φ è detta fase, trasla la funzione ma non agisce sulla x e ω è detta pulsazione. Quello che interessa ai fini del calcolo del periodo è proprio ω. Sapendo che il periodo della funzione $y = \sin x$ è $T = 2\pi$ allora nel caso suddetto sarà:

$$T = \frac{2\pi}{|\omega|}$$

In generale se:

$$y = A \sin(\omega x + \Phi) + B \quad e \quad y = C\cos(\omega x + \Phi) + D$$

con A, B, C, D costanti;

il periodo è $T := \frac{2\pi}{|\omega|}$

mentre se:

$$y = A\, tg(\omega x + \Phi) + B \quad e \quad y = C\, ctg(\omega x + \Phi) + D$$

il periodo è:

$$T = \frac{\pi}{|\omega|}$$

Determinare il periodo delle seguenti funzioni:

$f: x \mapsto \operatorname{sen}\frac{x}{2}$ $\Rightarrow$ $\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$ da cui $\omega = \frac{1}{2}$. Pertanto $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$

$f: x \mapsto \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ $\Rightarrow$ In questo caso $\omega = 2$ e $\Phi = -\frac{\pi}{3}$. Sapendo che la fase non influisce sul calcolo del periodo si ha:

$$T = \frac{2\pi}{2} \Rightarrow T = \pi$$

$f: x \mapsto \operatorname{ctg} 6x$ $\Rightarrow$ $\omega = 6$ pertanto:

$$T = \frac{\pi}{6}$$

$f: x \mapsto 3\sin\left(2x + \frac{4}{3}\pi\right) + \frac{1}{4}$

In questa funzione riconosciamo $A = 3$, $B = \frac{1}{4}$ $\omega = 2$, $\Phi = \frac{4}{3}\pi$ ma come sempre l'unico valore di cui teniamo conto è la pulsazione ω. Pertanto:

$$T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$f: x \mapsto \frac{2}{3}\operatorname{ctg}(\pi x) + \frac{2}{3}$

Anche qui l'unico valore di cui teniamo conto è $\omega = \pi$. Pertanto

$$T = \frac{\pi}{\pi} = 1$$