Funzioni composte

Due funzioni $f: D_f \to C_f$ e $g: D_g \to C_g$ si dicono componibili se $C_f \subseteq D_g$ ovvero il codominio di f è contenuto nel dominio di g.

Si viene così a definire una nuova funzione h

$$h = g \circ f : D_f \to C_g$$

detta funzione composta mediante la f e la g.

ESEMPIO: Siano date le funzioni:

$f: [-1;1] \to [0,1]$ t.c. $x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$

$g: [0,1] \to \mathbb{R}$ t.c. $y \longmapsto \text{sen}\, y$

e controlliamo se è possibile calcolare la funzione composta $h := g \circ f$.

Notiamo che $C_f = [0,1] = [0,1] = D_g$

La funzione h dovrà agire in questo modo:

$$\begin{tikzcd}
{[-1,1]} \arrow[r, "f"] & {[0,1]} \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \\
x \arrow[r, mapsto] \arrow[rr, bend right, "h := g \circ f"'] & \sqrt{1-x^2}\,(=y) \arrow[r, mapsto] & \text{sen}\sqrt{1-x^2}\,(=\text{sen}\, y)
\end{tikzcd}$$

Cioè $h: x \in [-1,1] \longmapsto \text{sen}\sqrt{1-x^2} \in \mathbb{R}$

Domanda: è possibile considerare $\tilde{h} = f \circ g$?

Risposta: No, non è possibile perché C_g non è contenuto in D_f. Infatti $\mathbb{R} \not\subseteq [-1,1]$.

ESERCIZI SULLE FUNZIONI COMPOSTE

Siano $f: x \mapsto \sqrt{x}$ e $g: x \mapsto x^2-4$

Innanzitutto procediamo con il calcolo di D_f e D_g.

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} = \mathbb{R}_0^+$

$D_g = \mathbb{R}$

Per calcolare l'insieme delle immagini delle funzioni f e g potremmo rappresentare queste ultime graficamente o altrimenti possiamo supporre che $C_f = C_g = \mathbb{R}$ per semplicità. (solo per il caso specifico perché $D_g = \mathbb{R}$ e dunque è vero che $C_f \subseteq D_g$).

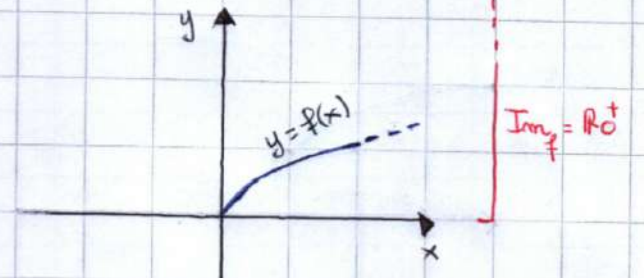
Procediamo con il calcolo di $h := g \circ f$.

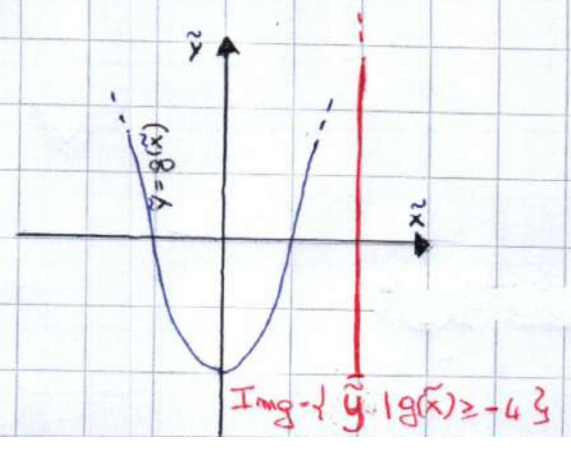
$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}_0^+ \arrow[r, bend left, "f"] & \mathbb{R} \arrow[r, bend left, "g"] & \mathbb{R} \\
x \arrow[r, mapsto] \arrow[rr, bend right, "h := g\circ f"'] & \sqrt{x} \, (= y) \arrow[r, mapsto] & (\sqrt{x})^2 - 4 \; (= y^2 - 4)
\end{tikzcd}$$

Pertanto sarà:

$$h: x \in \mathbb{R}_0^+ \longmapsto h(x) = x - 4 \in \mathbb{R}$$

Per il calcolo di $\tilde{h} = f \circ g$ procediamo con la ricerca dell'insieme delle immagini delle funzioni:





A questo punto, dopo aver verificato che:

$Img = \{\tilde{y} \mid g(\tilde{x}) \geq 4\} = [-4, +\infty)$ $D_g = \mathbb{R}$

$Imf = \{y \mid f(x) \geq 0\} = [0, +\infty)$ $D_f = \mathbb{R}_0^+$

si ha che: $Img \not\subset Df$ non è

dunque possibile calcolare $\tilde{h} = f \circ g$,

a meno che non si effettui una

restrizione sull' insieme delle immagini

della funzione g.