Restrizione e prolungamento di funzioni

Date due funzioni:

$$f: D_f \to \mathbb{R} \quad e \quad g: D_g \to \mathbb{R} \quad \text{con} \quad D_g \subset D_f$$

se per ogni $x \in D_g$ risulta:

$$g(x) = f(x)$$

la funzione g si dice una restrizione della funzione f, mentre la funzione f si dice un prolungamento della funzione g.

ESEMPIO 1:

Date le funzioni

$$f: \,]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[\, \longrightarrow \mathbb{R} \mid x \mapsto \sqrt{x^2-x}$$

$$g: [1; +\infty[\, \longrightarrow \mathbb{R} \mid x \mapsto \sqrt{x}\sqrt{x-1}$$

si ha che:

$$D_g := \{x \mid x \geq 1\} \subset D_f := \{x \mid x \leq 0 \vee x \geq 1\}$$

Inoltre per ogni $x \geq 1$ si ha che

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{x-1} = \sqrt{x^2-x}$$

$\downarrow$

il fatto che sia $x \geq 1$ assicura che $\sqrt{x}$ sia definita per $x \geq 0$.

ESEMPIO 2:

$$f: x \longmapsto \sqrt{\frac{x+2}{x}} \qquad\qquad g: x \longmapsto \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}$$

Determiniamo l'insieme di definizione della funzione f:

$$\begin{cases} \frac{x+2}{x} \geq 0 & \text{(radice)} \\ x \neq 0 & \text{(denominatore)} \end{cases}$$

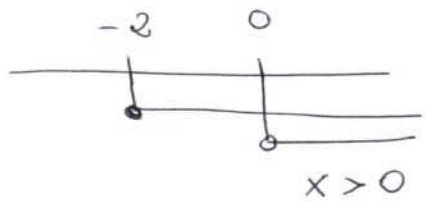
		-2		0	
$x \geq -2$	$\boxed{-}$		$+$		$\boxed{+}$
$x > 0$	$\boxed{-}$		$-$		$\boxed{+}$
RISULTATO	$x \leq -2$		$\vee$		$x > 0$

$$D_f := \{x \mid x \leq -2 \vee x > 0\}$$

Determiniamo l'insieme di definizione della funzione g:

$$\begin{cases} x+2 \geq 0 & \text{(radice)} \\ x \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x > 0 \text{ (radice + denominatore)}$$

$$\begin{cases} x \geq -2 \\ x > 0 \end{cases}$$



$D_g := \{x \mid x > 0\}$

Confrontando D_g e D_f si ha che $D_g \subseteq D_f$.

In più per $x > 0$ si ha:

$$\sqrt{\frac{x+2}{x}} = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}} \longrightarrow$$ x è sicuramente maggiore o uguale a -2 tenuto conto del dominio D_g per cui $x > 0$.