Dominio di una funzione: vari casi con $x \in \mathbb{R}$.

$f: x \mapsto 2x^2 - 3x + 5$ Le funzioni polinomiali hanno come dominio tutto l'asse reale.

$$D_f = \mathbb{R}$$

$f: x \mapsto \dfrac{x^3+2x}{(x-1)(x-2)}$ Le funzioni razionali hanno come dominio tutto l'asse reale, privato dei punti di singolarità, ovvero i punti nei quali il denominatore si annulla.

$$D_f = \mathbb{R} - \{1, 2\}$$

$f: x \mapsto \sqrt{4x^2-9}$ Le funzioni irrazionali del tipo:

$$f: x \longmapsto \sqrt[2n]{R(x)} \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

hanno come dominio:

$$D_f = \{x \mid x \in D_R,\ R(x) \geq 0\}.$$

Pertanto dovrà essere:

$$D_f = \{x \mid 4x^2 - 9 \geq 0\} \Rightarrow x^2 \geq \frac{9}{4} \Rightarrow x \leq -\frac{3}{2} \vee x \geq \frac{3}{2}$$

$f: x \longmapsto \sqrt[3]{x+3}$ Le funzioni irrazionali del tipo:

$$f: x \longmapsto \sqrt[2n+1]{R(x)} \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

hanno come dominio $D_f = D_R$.

In questo caso, essendo $D_R = \mathbb{R}$ allora

$$D_f = \mathbb{R}.$$

$f: x \longmapsto \operatorname{sen} x$ La funzione seno ha come dominio tutto l'asse reale.

$f: x \mapsto \cos x$ Anche la funzione coseno ha come dominio tutto l'asse reale.

$f: x \mapsto tg x$

Ricordando che $tg x = \frac{sen x}{cos x}$, per quanto visto nei casi precedenti dovrà essere $D_f = \{x \mid cos x \neq 0\}$. Sapendo che la funzione coseno si annulla per $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ allora:

$$D_f = \{x \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$f: x \mapsto ctg x$

Anche in questo caso, poiché $ctg x = \frac{cos x}{sen x}$ allora $D_f = \{x \mid sen x \neq 0\}$. Sapendo che la funzione seno si annulla per $x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ allora:

$$D_f = \{x \mid x \neq k\pi\} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$f: x \mapsto \log_a x$
con $a \in \mathbb{R}_0^+ - \{1\}$

Affinché la funzione logaritmica restituisca valori reali è necessario che il suo argomento sia strettamente positivo: $x > 0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}_0^+$

$f: x \mapsto \ln \sqrt{x+1}$

Per determinare D_f risolvo il seguente sistema:

$$D_f : \begin{cases} \sqrt{x+1} > 0 \Rightarrow x+1 > 0 \Rightarrow x > -1 \\ x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1 \end{cases}$$

$$D_f = \{x \mid x > 1\}$$

$f: x \mapsto a^x$
con $a \in \mathbb{R}_0^+ - \{1\}$

Le funzioni esponenziali hanno come dominio tutto l'asse reale.

$$D_f = \mathbb{R}.$$

funzione logaritmo con una funzione alla base:

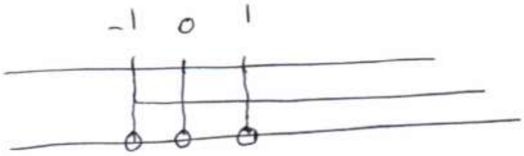
$$y = \log_{g(x)}[f(x)]$$

$$D_f : \begin{cases} \text{argomento} > 0 \\ \text{base} > 0 \\ \text{base} \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ g(x) \neq 1 \end{cases}$$

ESEMPIO:

$$y = \log_{x^2}(x+1)$$

$$D_f \Rightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ x^2 > 0 \\ x^2 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -1 \\ \forall x \in \mathbb{R}_0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$



$$-1 < x < 0 \ \vee \ 0 < x < 1 \ \vee \ x > 1$$

$$y = f(x)^\alpha$$

funzione potenza con esponente una frazione positiva o un numero irrazionale positivo

$\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha = \frac{m}{n} > 0$ e n pari oppure $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ con $\alpha > 0$

$$D_f = \{x \mid f(x) \geq 0\}$$

ESEMPIO

$$y = x^\pi$$

$$D : \{x : \mid x \geq 0\}$$

NOTA BENE: Se la funzione potenza ha come esponente una frazione positiva $\frac{m}{n}$ ove n è dispari:

$$y = f(x)^{\frac{m}{n}}$$

allora il dominio è D_f

ESEMPIO

$$y = (3x)^{\frac{4}{3}}$$

$D_f = \mathbb{R}$ infatti: $(3x)^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{(3x)^4}$

funzione potenza con esponente una frazione negativa o un numero irrazionale negativo.

$y = f(x)^{\alpha}$

$D_f = \{ x \mid f(x) > 0 \}$

Rispetto al caso precedente si esclude che $f(x) = 0$ in quanto, essendo α negativo, $f(x)$ passa al denominatore.

$\alpha \in \mathbb{Q}$; $\alpha = \frac{m}{n}$ oppure $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ con $\alpha < 0$

funzione elevata ad una funzione

$y = f(x)^{g(x)}$

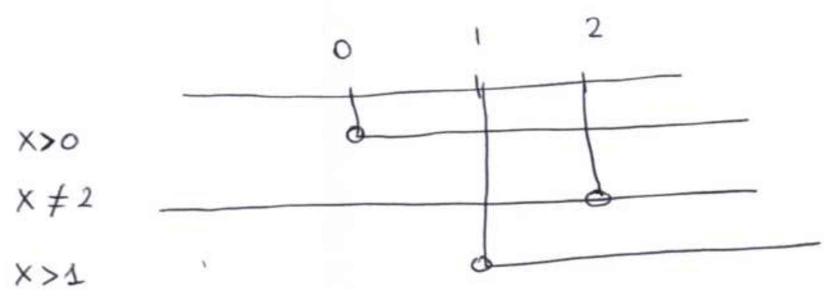
Determinare il dominio della funzione $f(x)^{g(x)}$ equivale a ricercare:

$$\begin{cases} D_f & \text{dominio di } f \\ D_g & \text{dominio di } g \\ f(x) > 0 & \text{positività di } f \end{cases}$$

Esempio:

$$y = (\ln x)^{\frac{1}{x-2}}$$

$$\begin{cases} D_f := \{ x \mid x > 0 \} \\ D_g := \{ x \mid x \neq 2 \} \\ \ln x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 2 \\ x > 1 \end{cases}$$



RISULTATO

$1 < x < 2 \ \vee \ x > 2$

funzione arcoseno

$y = \arcsin[f(x)]$

La funzione arcoseno è l'inversa della funzione seno che, avendo come insieme delle immagini l'intervallo $[-1, 1]$, manda l'intervallo $[-1,1]$ in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ cioè

arcoseno di x : $x \in [-1,1] \mapsto \arcsin x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Pertanto per il calcolo del dominio della funzione $y = \arcsin[f(x)]$ oltre a determinare D_f bisogna richiedere che $-1 \leq f(x) \leq 1$

funzione arcocoseno $y = \arccos[f(x)]$

Analogamente al caso precedente, la funzione arcocoseno di x ha come insieme di definizione l'intervallo $[-1, 1]$ che coincide con l'insieme delle immagini della funzione coseno di x:

arcocoseno di x : $x \in [-1, 1] \longmapsto \arccos x \in [0, \pi]$

Pertanto, volendo calcolare il dominio della funzione $y = \arccos[f(x)]$, oltre a determinare D_f bisogna richiedere che $-1 \leq f(x) \leq 1$.

funzione $\text{arctg}[f(x)]$ $\text{arccotg}[f(x)]$

Con lo stesso ragionamento fatto per le funzioni precedenti, le funzioni $\text{arctg}\,x$ e $\text{arccotg}\,x$ hanno come insieme di definizione tutto l'asse reale.
Poiché esaminiamo i casi $\text{arctg}[f(x)]$ e $\text{arcctg}[f(x)]$ dobbiamo ricordarci di tener conto anche dell'insieme di definizione della funzione $f(x)$.